



$$u = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3}$$

青年数学丛书

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

高次方程解法

(施笃姆法)

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

沙法列维奇著



$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}$$

13.13

$$+ \frac{1}{q_{x-1} + \frac{1}{q_n}}$$

27

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$



中国青年出版社

$$\tan \alpha = \frac{a}{x} \quad \tan \beta = \frac{b}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}$$



內 容 提 要

三次以及更高次的方程式，在科学上的应用很廣。

它們不像二次方程式那样有求解公式，要討論它們的性質，往往涉及到比較高深的數學理論。这本小冊子却採用了帶有餘式的代數除法和幾何圖形，只运用一般的代數和幾何見解，來進行討論。它介紹了高次方程式的某些重要性質，但並沒有涉及到虛根。所以讀者只要具备一般的代數和幾何知識，就可以順利地閱讀。

目 次

前言.....	1
一 根的界限.....	2
二 多項式的公根和等根.....	5
三 “多項式对”的特徵數.....	8
四 多項式位於 a 和 b 之間的根的個數.....	17

前 言

在中学的代數教程裏曾經引出了二次方程的求解公式，而从物理教程中便可以看到，这个公式對於很多物理問題（例如和匀加速運動有關的問題等）的解決是何等需要了。

可是三次以及更高次的方程在數學和它的应用中所起的作用並不次於二次方程。人們差不多像研究二次方程一样，很早就開始研究高次方程了。大家知道，在巴比倫的楔形表裏就有解某些三次方程的。虽然對這個問題已經研究了这样久，但是關於高次方程的基本性質，直到十九世紀才被發現。这本小册子就是來概括的談一談關於高次方程的某些基本性質。

我們討論高次方程性質所採用的方法，跟中学代數教程裏用來討論二次方程性質的方法是完全不同的。二次方程的一切性質，差不多都可以由它們的求解公式中推出來，現在我們却並不引出高次方程的求解公式，只是由某些一般的代數和幾何的見解去得出高次方程的性質來。

問題就在，對於大多數的高次方程並不存在像二次方程那樣的公式。而且即使在某些情況有这样的公式，这公式也非常複雜，不可能从它推出方程的任何性質來。而且除此以外，我們的方法还具有一个優點：它可以使得那些要被証明的事实的真正理由顯得格外清楚。

在这本小册子裏引出的所有討論，是對於任何次方程都適合的。它們往往都敘述成一般形式。在某些情形，如果討論到一般情況原則上雖完全相同而計算却嫌冗長的話，那末我們就僅用三次方程來討論，並且只敘述一下在一般情況所得的結果。很希望讀者獨立地把所有討論引到一般情況中去。

最後，我們完全略去和下面相類似的問題的證明：多項式的圖形若在 X 軸的兩側都有點，那末它必和 X 軸相交。大概有些讀者會感到並不需去證明類似的命題。誰要是希望作出這些證明，請參考任何一本數學分析教程的前幾章，就可以知道連續函數的最簡單性質，这样就很容易證明上面說的那個命題了。

在这本小册子裏，我們只研究方程的實根的性質，因此，讀者並不需要有複數性質的知識。但是，我們要指出，方程的複根的性質也可以用同樣的方法推出來，不過要略微複雜一些罷了。

一 根的界限

我們要提出的第一個問題，便是：對於每一個方程要去確定它的各個根分佈在那一個界限裏面。

假設我們的方程是三次的，並且具有

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

的形式。

我們現在來指出，如何求出這樣的正數 N ，假使 x 的絕對值超過了 N ，方程的左邊就不再等於零。這時候，根就一定位

於 $-N$ 和 N 之間。為此，我們設法來選擇這樣的 N ，假使 x 的絕對值大於 N ，那末首項的絕對值便超過其餘三項的和的絕對值。這時候，首項便不可能被其他那些項的和所抵消，因而整個式子也就不會等於零了。

如果首項的絕對值的三分之一大於其餘三項中每一項的絕對值，也就是

$$\frac{1}{3} |a| |x|^3 > |b| |x|^2, \quad \frac{1}{3} |a| |x|^3 > |c| |x|,$$

$$\frac{1}{3} |a| |x|^3 > |d|.$$

那末，便顯然可以達到我們的目的。解這些不等式，得到

$$|x| > 3 \frac{|b|}{|a|}, \quad |x| > \sqrt{3 \frac{|c|}{|a|}}, \quad |x| > \sqrt[3]{3 \frac{|d|}{|a|}}.$$

取三個數 $3 \frac{|b|}{|a|}$ ， $\sqrt{3 \frac{|c|}{|a|}}$ ， $\sqrt[3]{3 \frac{|d|}{|a|}}$ 中較大的一个作為 N ，

我們便得到了具有我們所需要的性質的數。事實上，當 $|x|$ 大於 N 時，所有三個不等式都是成立的；因此，方程(1)的左邊便不會變為零。

對於 n 次方程

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0, \quad (2)$$

我們只需要取下列諸數

$$n \frac{|b|}{|a|}, \quad \sqrt[n]{n \frac{|c|}{|a|}}, \quad \sqrt[n]{n \frac{|d|}{|a|}}, \quad \dots, \quad \sqrt[n]{n \frac{|k|}{|a|}}, \quad \sqrt[n]{n \frac{|l|}{|a|}}$$

中最大的一个作為 N ，就行了。

注意，我們已經證明的比上面原來要證明的還稍稍多一

些。因为方程(1)左边首項的絕對值大於其餘各項的和的絕對值,所以,整个式子的符号要由首項的符号來決定。这样一來,我們不僅知道方程(1)的左边当 x 的絕對值超过 N 時是一个不等於零的數,而且还可以指明这个數的符号是和首項的符号相同的。

从这些簡單的推想,我們已經能够引出關於方程的根的重要結果。为此需要用到函數

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l \quad (3)$$

的圖形。假設在平面上选好了座标軸,並且描出函數(3)的圖形(圖 1)。根据作圖的一般法則,圖形上 M 點的縱座标 u 就等於在式(3)中以橫座标 v 代替 x 得出來的那個數。特別是,当橫座标是方程(2)的根時,縱座标便變為零。这就是說,方程的根在幾何上可以用函數圖形和 X 軸的交點表示出來。

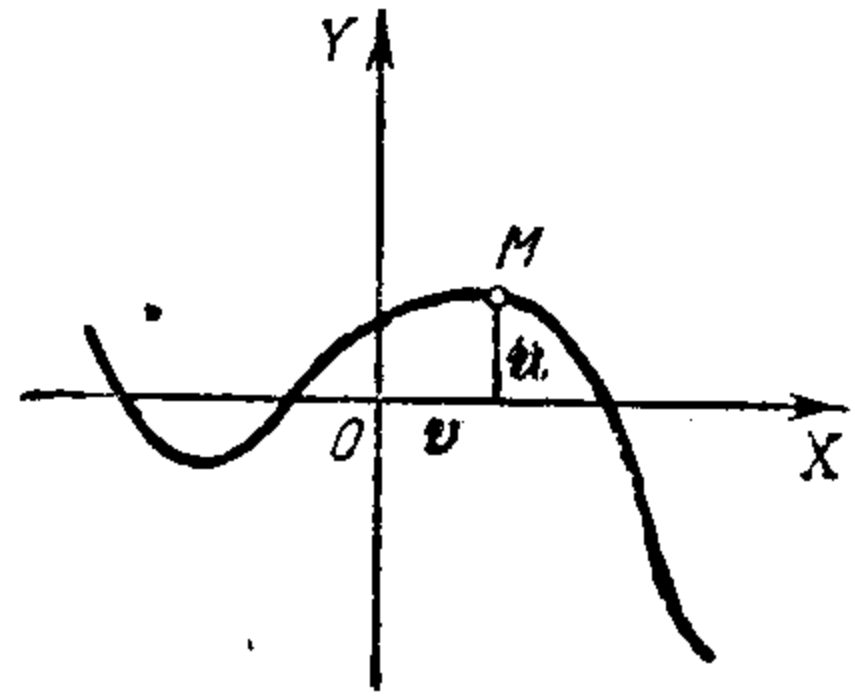


圖 1.

假設我們的方程是三次的。我們用首項的係數 a 來除它的二端,而把它寫成

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (4)$$

的形式。

我們來看,所求得的具有前面所說性質的數 N 的幾何義。方程(4)所有的根位於 $-N$ 和 N 之間,这就表明函數

$$y = x^3 + px^2 + qx + r \quad (5)$$

的圖形,只有在它們的橫座标 x 位於 $-N$ 和 N 之間的點處,才

可能和 X 軸相交。可是函數的圖形是否一定和 X 軸相交呢？回顧一下前面所說，如果 x 的絕對值大於 N ，那末函數(5)的符號和它的首項的符號相同。可是我們已經知道，首項的符號是和 x 的符號一致的。因此，如果 x 大於 N ，那末多項式是正的，這就表示：這部分圖形位於 X 軸的上方。如果 x 小於 $-N$ ，那末多項式是負的，也就是這部分圖形位於 X 軸的下方。這樣一來，我們便知道了圖形的大致形狀如圖 2。由圖可以清楚地看到，函數的圖形至少應該和 X 軸相交一次，也就是說，三次方程至少有一個根。對於高次方程，也有類似的情形：奇次方程至少有一個根。顯然，對於偶次方程，這個定理並不成立，像我們已經指出的二次方程就可能根本沒有根[⊖]。

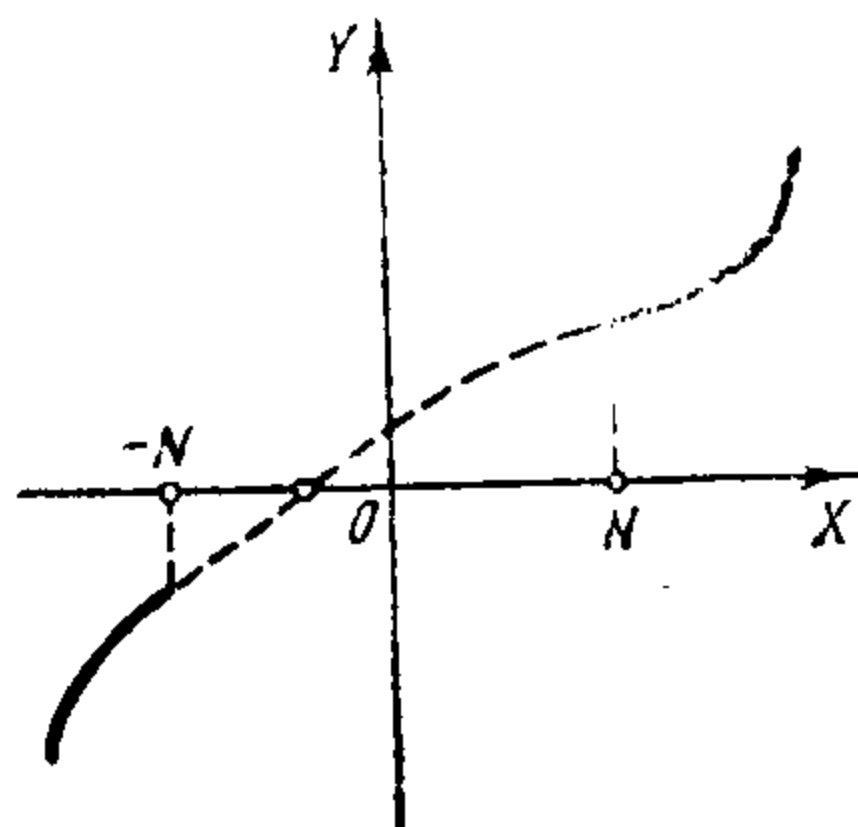


圖 2.

二 多項式的公根和等根

我們下面要用到的一个基本的代數方法，便是帶有餘式的多項式除法。如果有兩個多項式 f 和 g ，我們就可以用其中次數較低的一个多項式去除(用一般的“長除法”)另一个多項式，而得到商的整式部分 q 和餘式 h ，餘式的次數已經比除式低了。這可以寫成公式

[⊖] 記住：我們這裏所說的根總是指實根，因此，例如方程 $x^2+1=0$ ，從我們的觀點來看，便沒有根。

$$f = g \cdot q + h \quad (6)$$

的形式。帶有餘式的除法——這是一般的方法，所以把“多項式對” f 和 g 的研究轉變成具有較低次數的“多項式對” g 和 h 的研究。正是由於這種情形，常常使得“多項式對”的性質有可能比一個多項式的性質容易研究些。

例如，我們來考慮如何去求兩個多項式 f 和 g 的公根。如果 α 是多項式 f 以及多項式 g 的根，那末在關係式(6)中令 $x = \alpha$ ，我們便得到 h 等於零，也就是它具有根 α 。這樣，多項式 f 和 g 的公根也就是多項式 g 和 h 的公根。反之，仍然由關係式(6)，我們可以看出：如果 α 是多項式 g 和 h 的公根，那末它就也是 f 的根，即多項式 f 和 g 的公根。總之，這兩個斷言表明，多項式 f 和 g 的公根，必定是 g 和 h 的公根，反過來說也對。在這裏，它的用途便在於多項式 g 和 h 的次數比 f 和 g 要低。對於 g 和 h ，我們可以重複這種討論，用 h 除 g 而帶有餘式。用這種方法，我們便可以得到次數越來越低的“多項式對”，而且所有這些“多項式對”的公根和原來“多項式對”的公根相同。我們有必要來講一講，當給出的“多項式對” u 和 v 之中，有一個，例如 v 是零的情形。但是在這種情形，多項式 u 的所有的根都是 u 和 v 的公根，因 v 恆等於零，故任何數都可作為它的根。

這樣一來，求多項式 f 和 g 的公根的問題就變為去求一般說來次數是很低的多項式 u 的根的問題了。

我們來看一個例題。試求多項式 $x^4 + x^2 + 3x + 1$ 和 $x^3 + x + 2$ 的公根。

我們用第二個多項式去除第一個多項式而帶餘式：

$$\begin{array}{r} x^4 + x^2 + 3x + 1 \quad | \quad x^3 + x + 2 \\ \underline{x^4 + x^2 + 2x} \\ x + 1 \end{array}$$

餘式是 $x+1$ 。因此，原來那“多項式對”和多項式 x^3+x+2 及 $x+1$ ，有相同的公根。

再用第二個除第一個而帶有餘式：

$$\begin{array}{r} x^3 + x + 2 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 + x + 2 \\ \underline{-x^2 - x} \\ 2x + 2 \\ \underline{2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

餘式是 0。因此，多項式 $x+1$ 及 0 也具有相同的公根，也就是僅有的一个公根 -1 。

我們現在應用目前所得結果來解決另一個問題：確定一个給定的多項式的一些根裏面有沒有等根。並且求出這些等根來。我們仍然打算就三次多項式(5)來討論。設这个多項式有一个根 α ，那末它便可以被 $x-\alpha$ 除盡。這可由貝塞定理[⊖]推得，但是我們現在用簡單的除法來驗證这个事实：

$$\begin{array}{r} x^3 + px^2 + qx + r \quad | \quad x - \alpha \\ \underline{x^3 - \alpha x^2} \\ (p + \alpha)x^2 + qx + r \\ \underline{(p + \alpha)x^2 - \alpha(p + \alpha)x} \\ (\alpha^2 + p\alpha + q)x + r \\ \underline{(\alpha^2 + p\alpha + q)x - \alpha(\alpha^2 + p\alpha + q)} \\ \alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r \end{array}$$

⊖ 貝塞定理即餘式定理。——譯者註

餘式 $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r$ 等於零，因為我們原來假定 α 是方程(4)的根。我們順便得到這個除法的商是

$$x^2 + (p + \alpha)x + (\alpha^2 + p\alpha + q) \quad (7)$$

如果方程(4)還有一個根等於 α ，那末它就應該是多項式(7)的根。在(7)中用 α 代替 x ，我們便得 $3\alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$ 。

於是，我們證明了多項式(5)的等根就是這個多項式和多項式 $3x^2 + 2px + q$ 的公根。後面這個多項式叫做多項式(5)的導來多項式。這樣一來，問題就變成去求多項式和它的導來多項式的公根了。而這個問題我們已經能夠解決。

對於 n 次多項式(2)，完全類似的定理也是成立的。在這裏，多項式 $nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \dots + k$ 起着多項式 $3x^2 + 2px + q$ 的作用。而這個多項式也被稱為多項式(2)的導來多項式。

三 “多項式對”的特徵數

現在轉到我們的主題上來。它可以這樣來敘述：設給定一個多項式 f 和兩個數 a, b ，並且 $a < b$ ；要想知道多項式 f 有多少個根介於 a 和 b 之間，也就是有多少個根小於 b 而大於 a 。後面我們會看到，由於這個問題的解決，就可以推引出許多關於多項式根的問題的答案，例如：根的個數，根的分佈，甚至於它們的計算方法等等。

在解決這個問題時，我們將同前節一樣來着手，也就是首先考察“多項式對”的性質。在這裏我們還是運用我們已經遇見過的那兩種方法：代數的方法——帶有餘式的除法，和幾何的

方法——作圖。

設給定了兩個多項式，這裏它們所給定的順序對我們來說也是重要的。用 f_1 表示第一個多項式， f_2 表示第二個多項式。再假設 f_1 和 f_2 沒有公根，因為它們的公根我們可以按前節的方法找出而約去。作出多項式 f_1 和 f_2 的圖形（我們把 f_1 的圖形畫成實線，而把 f_2 的圖形畫成虛線；如圖 3）。

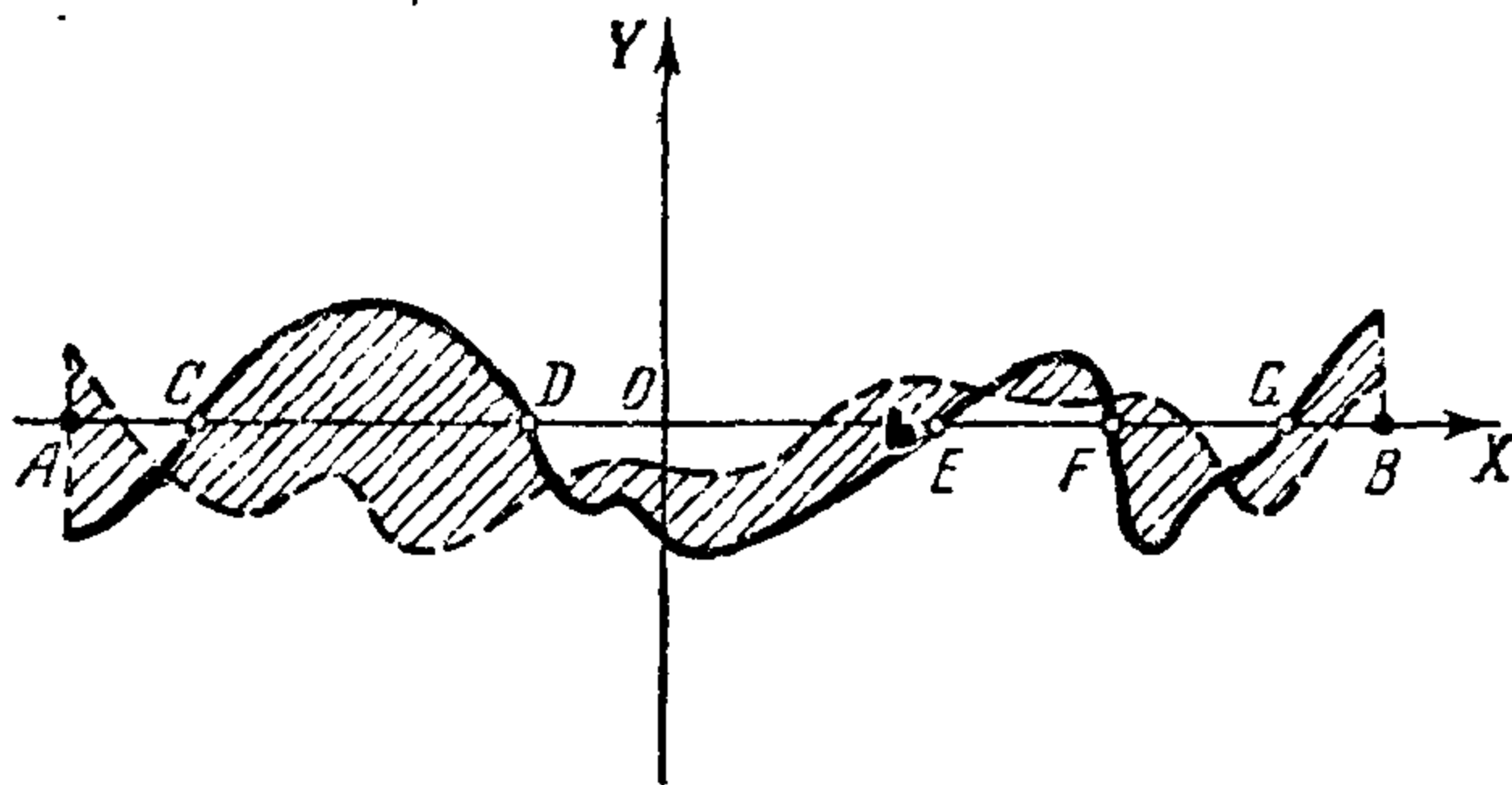


圖 3.

它們將把整個平面分成三個部分：第一是位於兩個圖形下面的部分；第二是位於兩個圖形上面的部分；第三是位於兩個圖形之間的部分。第三個部分便是我們今後要注意的部分。我們在圖上特別把這部分加上陰影，而稱它為陰影域。在 X 軸上作橫座標等於 a 和 b 的兩點，並且記作 A 和 B 。我們將點 A 沿 X 軸向點 B 移動。這時候，我們便和多項式 f_1 和 f_2 的圖形在表示它們的根的那些點處通過。在這些通過的點裏面，在某些點處我們將

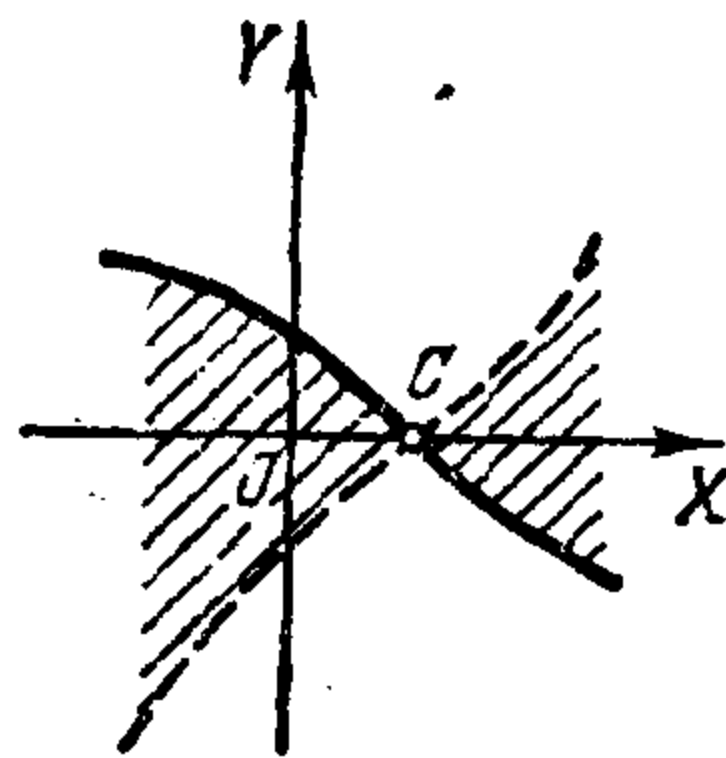


圖 4.

从陰影域中出來，而在另一些點处却是進入陰影域裏。我們把第一種點称为“出點”，把第二種點称为“入點”。必須指出：一點不可能既是入點又是出點（像圖 4 上的 C 點那樣），因为這樣的點表示了多項式 f_1 和 f_2 的公根，而我們原來假定公根是不存在的。

現在我們來引進一個新的概念。

屬於多項式 f_1 的圖形並且位於 A 、 B 兩點間出點的個數和入點的個數的差，叫做多項式 f_1 、 f_2 的特徵數。

例如，圖 3 上的點 D 和 E 是屬於 f_1 的圖形的出點，而 C 、 F 和 G 是同一圖形上的入點。在這種情形下，特徵數等於 $2-3=-1$ 。特徵數是一個整數，用記号 (f_1, f_2) 來表示它。當然，它除了跟多項式 f_1 和 f_2 有關係以外，還跟限制着多項式圖形的考慮範圍的點 A 和 B 有關係。

十分明顯，多項式 f_1 和 f_2 的特徵數和我們取定哪個多項式作第一式也是有關係的，因为當計算特徵數時我們只注意到第一個多項式圖形上的出點和入點。所以還需要把下面這一點來說明一下：如果我們取定的第一個多項式不是 f_1 而是 f_2 ，這時候特徵數將引起怎樣的改變，或者換句話說，就是 (f_1, f_2) 和 (f_2, f_1) 兩數之間有怎樣的關係。

我們用下面的實物情況來設想一下，是有好處的。比如有一間房間，一個人可以走進去，也可以從它裏面走出來。我們用 P 來表示在給定的時間內人從房間裏走出來的次數，而用 Q 來表示人走進去的次數。顯然，因为除了最後一次以外在每一次進去之後都跟着要出來，而在每一次出來之後跟着

要進去，所以進去的次數和出來的次數在任何一邊相差都不可能大於1。我們可以把它寫成：

$$P=Q+e. \quad e=0, 1, \text{ 或 } -1. \quad (8)$$

e 的更精確的數值可由下表確定：

1—假設開始時這個人在裏面，而終了時他是在外面。

-1—假設開始時他在外面，而終了時在裏面。

0—假設開始和終了時他同是在裏面或同是在外面
(圖5)。

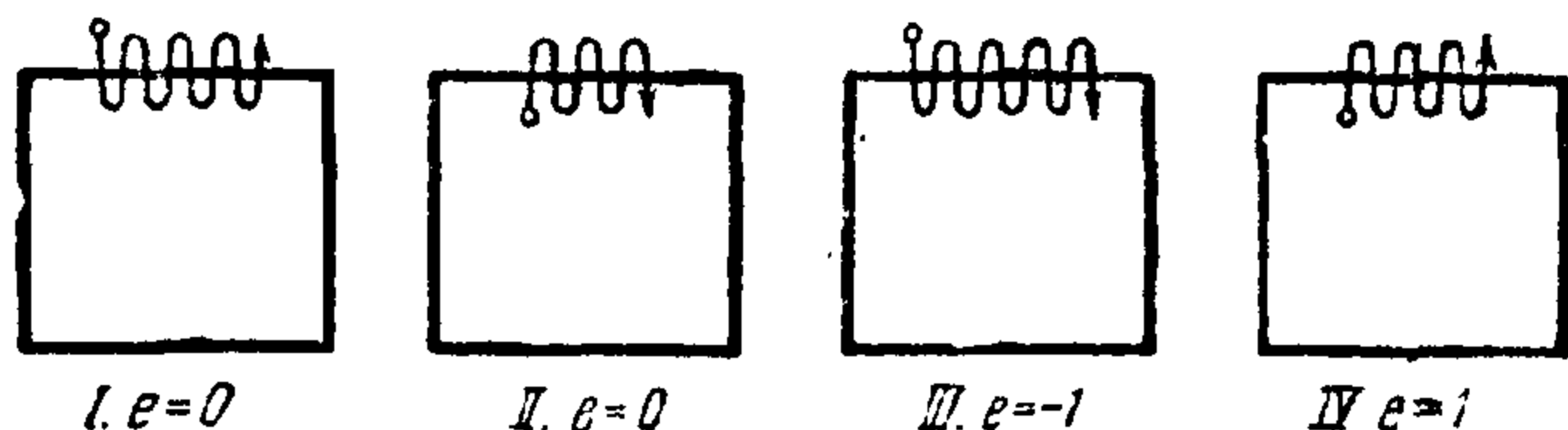


圖5.

現在我們把問題想得更複雜一些：房間裏有兩扇門—I和II，而分別計算通過每一扇門的進去和出來的次數。我們用 P_1 和 Q_1 分別表示通過門I的出來和進去的次數，通過門II的是用 P_2 和 Q_2 來表示。顯然，通過兩扇門的進去和出來的總數是滿足關係式(8)的，也就是

$$P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2 + e,$$

從而我們便得到：

$$P_1 - Q_1 = -(P_2 - Q_2) + e,$$

這就表明了，通過門I的出來次數和進去次數的差跟通過門II的出來次數和進去次數的差相互間的簡單聯系。

顯然，這和我們的多項式很有關係。房間好比陰影域，門

I 好比多項式 f_1 的圖形, 門 II 好比 f_2 的圖形, 出來和進去好比出點和入點, $P_1 - Q_1$ 不是別的, 正是特徵數 (f_1, f_2) , $P_2 - Q_2$ 正是特徵數 (f_2, f_1) . 我們便得到關係式

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1) + e,$$

而剩下來的只須說明在我們的情形下 e 是什麼意義.

我們開始是在陰影域(房間)裏面还是在它外面, 依賴於多項式 f_1 和 f_2 在 $x=a$ 時的值是同号还是異号. 完全一樣, 我們最後是在陰影域裏面还是外面, 依賴於 f_1 和 f_2 在 $x=b$ 時的值是同号还是異号. 我們規定, 如果一個“數對”是同号的, 便說它們之間沒有變号, 如果一個“數對”是異号的, 便說它們之間有一個變号. 用 a_1 和 a_2 表示 f_1 和 f_2 在 $x=a$ 時的值, b_1, b_2 表示它們在 $x=b$ 時的值. 這樣便容易驗證, e 將等於數對 a_1, a_2 的變号數和數對 b_1, b_2 的變号數之間的差. 若用 m_1 表第一數, 而用 n_1 表第二數, 那末 $e = m_1 - n_1$.

直到現在為止, 我們還沒有方法去求兩個多項式的特徵數, 因為要想利用特徵數的定義, 必須知道它們的根. 現在我們就可以引出這樣的方法了. 帶有餘式的除法正好在這裏發生效力. 我們用 f_2 來除 f_1 而帶有餘式:

$$f_1 = f_2 q + f_3 \quad (f_3 \text{ 是餘式}), \quad (9)$$

並且我們提出一個問題: 特徵數 (f_1, f_2) 和 (f_2, f_3) 是怎樣聯系着的. 問題的這樣提出, 啓示我們應用上一節的結果, 在那裏我們已經看到多項式對 f_1, f_2 的公根和多項式對 f_2, f_3 的公根相同. 首先我們有:

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_3) + e. \quad (10)$$

剩下來的，是要比較 (f_2, f_1) 和 (f_2, f_3) 。我們來證明這兩個數相等。為此我們注意：如果 α 是多項式 f_2 的根，那末在 $x = \alpha$ 時多項式 f_1 和 f_3 的值相等（圖 6）。這我們只要在 (9) 中把 x 換成 α ，注意這時候含有 f_2 的一項是零，便可以證明這一點。由此推得，在橫座標 $x = \alpha$ 的附近多項式 f_1 和 f_3 的圖形位於多項式 f_2 圖形的同一側（圖 6）。從而便簡單地推得了特徵數 (f_2, f_1) 和 (f_2, f_3) 是相等的。事實上，當計算兩個特徵數時，我們應當挑選多項式 f_2 在 A, B 之間的根，並且考察它們之中哪些是入點哪些是出點。但是由剛才所證關於多項式 f_1, f_2 和 f_3 圖形的分佈，便知道，如果根 α 在由多項式 f_2 和 f_1 的圖形所構成

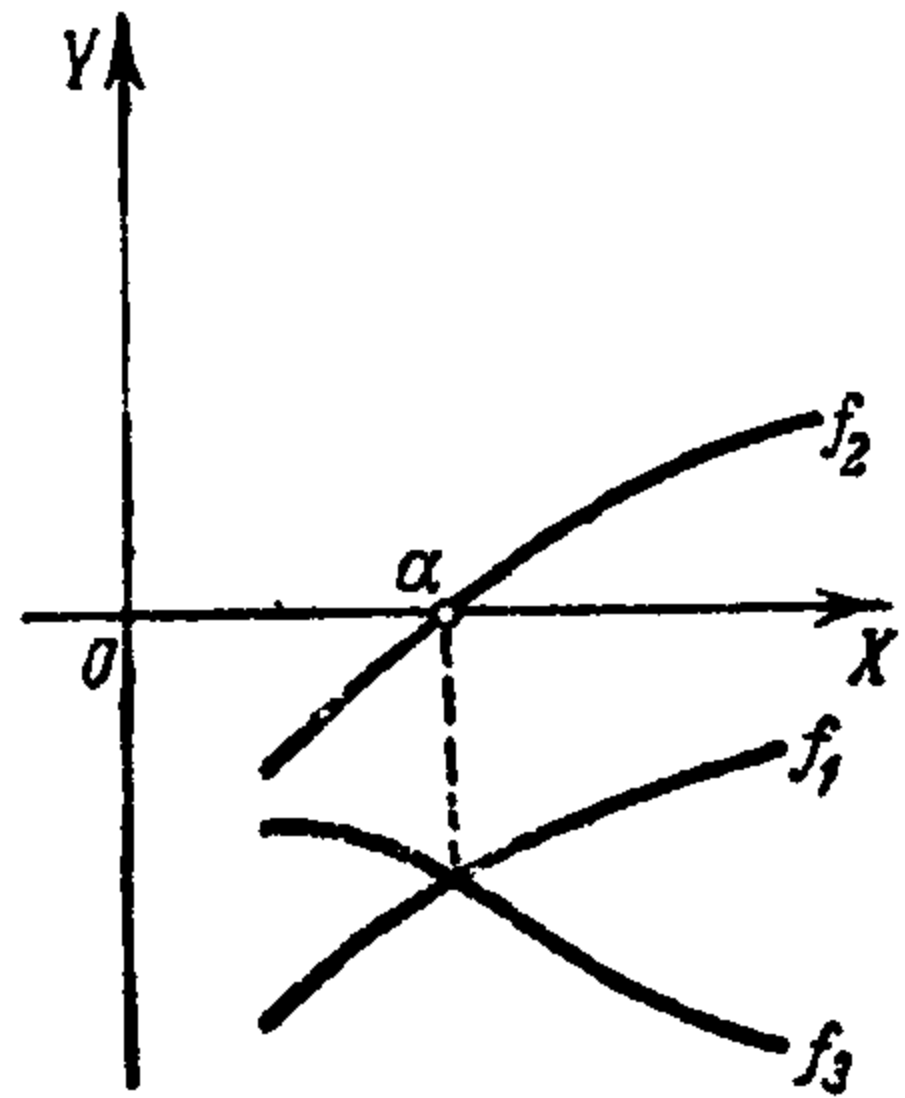


圖 6.

的陰影域中是入點，那末它在由 f_2 和 f_3 的圖形所構成的域中也同樣表示成入點。對於出點的情況，同樣成立。

這樣，特徵數 (f_2, f_1) 和 (f_2, f_3) 相等被證明了。代入 (10)，這就給出關係式

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_3) + e. \quad (11)$$

因為多項式 f_2 和 f_3 比多項式 f_1 和 f_2 的次數要低，所以這就使我們得到了一個計算“多項式對”的特徵數的一般方法。

原則上，我們的問題——學會計算“多項式對”的特徵數是解決了，但是還可以使所得的結果具有更完善的形式。為此，我們設法去掉公式 (11) 中的負號。最簡單的是，不取用 f_2

除 f_1 的餘式作為 f_3 ，而把這個餘式改號取作 f_3 。這時餘式便是 $-f_3$ ，而(9)將呈下列形式：

$$f_1 = f_2 q - f_3,$$

而公式(11)獲得更簡單的形式

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_3) + e. \quad (12)$$

要想驗證這一點，我們只須證明：如果把第二個多項式改號，那末“多項式對”的特徵數也改號。但是從圖上看，這是十分明顯的，因為第二個多項式的圖形這時換成了它關於 X 軸的對稱曲線，這樣一來，第一個多項式的所有是出點的根就變成入點，反過來也成立。顯然，特徵數也改變了符號。

在我們用 f_2 除 f_1 、並且把餘式改號而用 f_3 來表示它以後，再對 f_2 和 f_3 作同樣的處理，並且當我們沒有得到餘式等於零時，一直繼續下去。這樣所得的多項式列 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ (不為零) 稱為多項式 f_1 和 f_2 的施篤姆列。施篤姆列的最後一個多項式 f_k 不可能有根，因為多項式 f_1, f_2, \dots, f_k 和我們在前節關於確定 f_1 和 f_2 的公根時所作的那些多項式只相差一個符號；如果 f_k 有根，那末它便是 f_1 和 f_2 的公根，而我們假定了它們是沒有公根的。對於施篤姆列中每一相繼的“多項式對”寫出公式(12)，我們便得一整串的公式：

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_3) + e_1.$$

$$(f_2, f_3) = (f_3, f_4) + e_2.$$

.....

$$(f_{k-2}, f_{k-1}) = (f_{k-1}, f_k) + e_{k-2}.$$

$$(f_{k-1}, f_k) = (f_k, 0) + e_{k-1}.$$

這裏數 e_1, \dots, e_{k-1} 具有以前的意義，即它們中的任一個，例如 e_i 是多項式 f_i 在 $x=a, x=b$ 時的值的變號數和多項式 f_{i+1} 在 $x=a, x=b$ 時的值的變號數之間的差。

現在我們注意，因為 f_k 沒有根，所以它和任何多項式的特徵數都等於 0，特別是 $(f_k, 0) = 0$ ，這樣，我們可以把末了一個公式改寫成： $(f_{k-1}, f_k) = e_{k-1}$ 。從倒數第二個公式，我們定得 (f_{k-2}, f_{k-1}) 是等於 $e_{k-2} + e_{k-1}$ 。

以後同樣來進行，最後，我們便得

$$(f_1, f_2) = e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1}. \quad (13)$$

這個公式還可以簡化。我們用 a_1, a_2, \dots, a_k 表示多項式 f_1, f_2, \dots, f_k 在 $x=a$ 時的值，而用 b_1, b_2, \dots, b_k 來表示 $x=b$ 時的值。若在“數對” a_i 和 a_{i+1} 處的變號數是 m_i ，而在“數對” b_i 和 b_{i+1} 處的變號數是 n_i ，那末

$$e_i = m_i - n_i.$$

因此公式(13)可以改寫成：

$$(f_1, f_2) = (m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) + \dots + (m_{k-1} - n_{k-1}),$$

或者

$$(f_1, f_2) = (m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}) - (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}).$$

數 $m_1 + \dots + m_{k-1}$ 表示出數列 a_1, a_2, \dots, a_k 中相鄰兩數間所含的變號總數。數 $n_1 + \dots + n_{k-1}$ 同樣表示出 b_1, \dots, b_k 中相鄰兩數間所含的變號總數。這些數稱為數列 a_1, \dots, a_k 和 b_1, \dots, b_k 中的變號數。

現在我們可以把我們最後所得的結果敘述成這樣：“多項式對”的特徵數等於在施篤姆列中的多項式在 $x=a$ 和 $x=b$

的值的变号数之间的差。

我們用一个例子來結束这冗長的一節。確定多項式 $f_1 = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ 和 $f_2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ 的特徵數；其中假設 $a=0, b=5$ 找出施篤姆列。用 f_2 除 f_1 而帶餘式：

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 19x - 12 & x^3 - 9x^2 + 27x - 26 \\ x^3 - 9x^2 + 27x - 26 & 1 \\ \hline & x^2 - 8x + 14 \end{array}$$

餘式是 $x^2 - 8x + 14$ ，因此 $f_3 = -x^2 + 8x - 14$ ，用 f_3 除 f_2 而帶餘式：

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 9x^2 + 27x - 26 & -x^2 + 8x - 14 \\ x^3 - 8x^2 + 14x & -x + 1 \\ \hline -x^2 + 13x - 26 & \\ -x^2 + 8x - 14 & \\ \hline & 5x - 12 \end{array}$$

餘式是 $5x - 12$ ，因此 $f_4 = -5x + 12$ 。用 f_4 除 f_3 而帶餘式：

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + 8x - 14 & -5x + 12 \\ -x^2 + \frac{12}{5}x & \frac{1}{5}x - \frac{28}{25} \\ \hline & \frac{28}{5}x - 14 \\ & \frac{28}{5}x - 12 \cdot \frac{28}{25} \\ \hline & -14 + 12 \cdot \frac{28}{25} = -\frac{14}{25} \end{array}$$

餘式是 $-\frac{14}{25}$ ，因此 $f_5 = \frac{14}{25}$

顯然，下一个餘式已是零了。这样一來，施篤姆列就由多項式 $x^3 - 8x^2 + 19x - 12, x^3 - 9x^2 + 27x - 26, -x^2 + 8x - 14, -5x + 12, \frac{14}{25}$ 組成。

施篤姆列多項式的值確定在下表中：

	$x=0$	$x=5$
f_1	-12	8
f_2	-26	9
f_3	-14	1
f_4	12	-13
f_5	$\frac{14}{25}$	$\frac{14}{25}$

這樣一來，第一直行恰好含有數列 a_1, \dots, a_k ，而第二直行是數列 b_1, \dots, b_k 。在第一直行中有一個變號，它發生在列中 -14 和 12 處，在第二直行中有二個變號，它們發生在列中 1 和 -13，-13 和 $\frac{14}{25}$ 處。特徵數等於 $1-2=-1$ 。

四 多項式位於 a 和 b 之間的根的個數

我們現在來指明如何從“多項式對”的特徵數去求出一個多項式的根。“多項式對” f_1 和 f_2 的特徵數等於多項式 f_1 在 a 和 b 之間的那些根中出點個數和入點個數之差。如果我們善於這樣來選擇多項式 f_2 ，使得多項式 f_1 的所有的根都是出點，就是說沒有一個是入點，那末“多項式對” f_1 和 f_2 的特徵數便完全和多項式 f_1 在 a 和 b 之間的根的個數一致。

我們來看一下如何去選擇這樣的多項式 f_2 。這時必須假設多項式 f_1 沒有等根。設 α 是多項式 f_1 的一個根。我們應該怎樣來安置多項式 f_2 的圖形，使得表示根 α 的點是出點？這可能有兩種情況，要看多項式 f_1 的圖形當 $x=\alpha$ 時是從底

下向上升呢还是从上面下降。像圖 7 和圖 8 表示的那樣，在第一种情形，多項式 f_1 的圖形在 $x=\alpha$ 時應該位於 X 軸的上方，而在第二种情形應該位於 X 軸的下方。換句話說，在第一种情形，當 $x=\alpha$ 時多項式的值應該是正的，而在第二种情形應該是負的。現在我們來看，怎樣會看出兩種情形中哪一

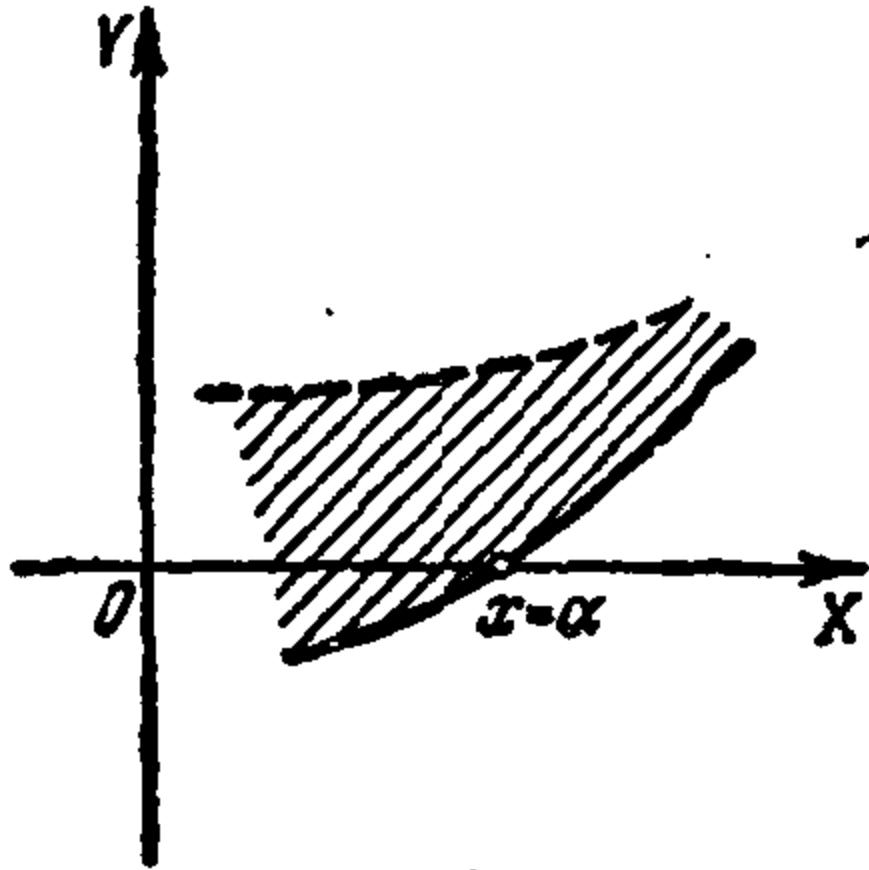


圖 7.

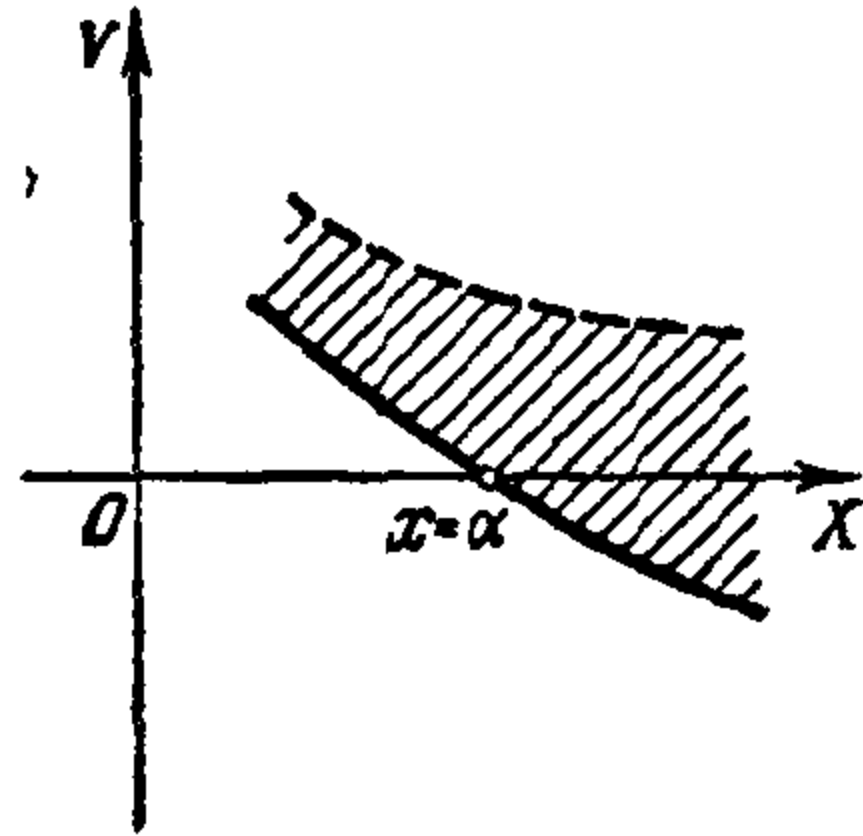


圖 8.

種成立。第一种情形歸結為，當 x 小於 α 時多項式 f_1 是負的，而當 x 大於 α 時它是正的。而在第二种情形恰恰相反。

再假設，我們討論的是有根 α 的三次多項式 $f_1 = x^3 + px^2 + qx + r$ ，並且回憶到还是在第二節裏我們就已經證明了的，用 $(x-\alpha)$ 去除這樣的多項式所得的商等於 $x^2 + (p+\alpha)x + (\alpha^2 + p\alpha + q)$ ：

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)[x^2 + (p+\alpha)x + (\alpha^2 + p\alpha + q)].$$

我們利用這個分解式，來確定當 x 比 α 稍微小一點或稍微大一點時，多項式 f_1 所取的那些值的符號怎樣。從第一個因式很顯然：若 x 小於 α 那末它是負的，而在 x 大於 α 時它是正的。我們轉過來討論第二個因式。當 $x=\alpha$ 時它不等於零。其實，我們在第二節裏已經見到，這便表示多項式 f_1 具

有兩個等根，而我們却是假設它沒有等根的。第二個因式當 $x = \alpha$ 的值恰好等於多項式 f_1 的導來多項式在 $x = \alpha$ 時的值。如果這是一個正數，那末當 x 和 α 相差不大時（也就是，若 x 比這個二次三項式的任何根都更接近 α 時），第二個因式是正的，而這便表示整個乘積本身所取的值的符號同第一個因式所取的值的符號一樣。換句話說，我們這裏有了第一種情形。反之，若導來多項式的值是負的，那末整個符號都變成相反的符號，我們就有了第二種情形。

我們已經確定了，我們所熟知的導來多項式在這裏起着決定性的作用，也就是說，如果導來多項式當 $x = \alpha$ 時的值是正的，便具有第一種情形，如果它是負的，便有第二種情形。同樣對於任何次多項式都成立。

但是由此，我們立刻便可以看到，這樣的多項式 f_2 恰好是導來多項式，我們應當如何去求出它。換句話說，如果取 f_1 的導來多項式作為 f_2 ，那末特徵數 (f_1, f_2) 將等於多項式 f_1 位於 a 和 b 之間的根的個數。因為我們在前節中已經引出了計算特徵數的方法，所以我們有方法求出任何多項式位於 a 和 b 之間根的個數。

我們把所得的關於求多項式根的個數的法則敘述如下：

要想求多項式位於 a 和 b 之間的根的個數，必須求出這個多項式和它的導來多項式的施篤姆列，並且計算這列多項式分別在 $x = a$ 和 $x = b$ 時的值。在第一列數的變號數和第二列數的變號數之間的差，便是所求的根的個數。

這個法則是法國數學家施篤姆的一個著名的定理。這個

定理是他在1829年證明的。

有趣的是，我們在解決我們的問題——求多項式位於 a 和 b 之間的根的個數上所用的推理方法，和我們在第二節中解決另一個問題——求多項式的等根時所用的推理方法，有很多共同點。在兩種情形中都是先來研究某些“多項式對”的性質——第一種情形是關於公根的問題，第二種情形是關於特徵數的求法。由於在兩種情形中都一樣，“多項式對”的性質比一個多項式的性質容易了解——對兩個多項式可應用帶有餘式的除法，因此，解決我們所注意的關於兩個已知多項式的問題就變成去解決另兩個次數較低的多項式的同一問題。以後，我們在兩種情形下對於我們已知的多項式 f_1 都選擇這樣一個輔助多項式 f_2 （在兩種情形中，可以把 f_1 的導來多項式作為這樣的多項式），使我們所解決的關於“多項式對”的問題應用到“多項式對” f_1, f_2 上來，便得到了我們所注意的關於多項式 f_1 的問題的解答。

現在我們指出，怎樣應用施篤姆定理來解決一系列關於任何次多項式根的問題。

首先，我們來確定所給多項式 f 的、所有的、而不僅是位於 a, b 之間的根的個數問題。我們把施篤姆定理和我們在第一節中所得到的結果聯繫起來，便立刻可以得到這問題的解。在那裏，我們曾經指出過怎樣去求這樣一個數 N ，使得多項式所有的根都位於 $-N$ 和 N 之間。由此推知，如果我們應用施篤姆定理來確定多項式位於 $-N$ 和 N （取 $a = -N, b = N$ ）之間的根的個數，那末我們就得到它的所有根的個數。這樣，問

題就解決了。

然而，这个解答还可以表示成更精緻的形式。設對於多項式 f_1 和它的導來多項式 f_2 的施篤姆列是由多項式 f_1, f_2, \dots, f_k 所組成。

對於這列中的每一個多項式 f_i ，根據第一節存在這樣一個數 N_i ，使得 f_i 的根位於 $-N_i$ 與 N_i 之間。現在我們把大於所有數 N_i 的任一個數取作 N 。這時，所有多項式 f_i 的根便都位於 $-N$ 和 N 之間了。如果我們現在應用施篤姆定理，取 $a = -N$ 和 $b = N$ ，那末我們當然得到我們的多項式的所有根的个数。顯然，當計算施篤姆列中多項式在 $x = a$ 和 $x = b$ 處的值變號數時，我們並不需要計算這些值本身。

事實上，我們本來只注重符號，而我們在第一節中已經證明了，任何一個多項式對於小於 $-N$ 而大於 N 的 x ，它所取的那些值的符號和它首項的符號相同。我們就是這樣選擇 N 的，使得它大於所有的 N_i ，而這也就是 $-N$ 小於所有 N_i 。這樣一來，施篤姆列的多項式在 $x = N$ 和 $x = -N$ 時的值，由它們第一項的符號來決定。我們指出這樣一件有趣的事實，雖然我們在討論中已經利用了數 N 的存在，我們在每一種具體情形下並不需要去計算它，因為施篤姆列的每一個多項式的首項具有形式 ax^k 而它當 $x = -N$ 和 $x = N$ 時的符號完全是跟 N 的大小無關的。

例：試求多項式 $f_1 = x^3 + 3x - 1$ 所有的根的个数。

導來多項式是 $3x^2 + 3 = f_2$ 。找出施篤姆列。用 f_2 除 f_1 而帶有餘式：

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x - 1 & 3x^2 + 3 \\ x^3 + x & \frac{1}{3}x \\ \hline 2x - 1 & \end{array}$$

餘式是 $2x-1$ ，因此 $f_3 = -2x+1$ 。用 f_3 除 f_2 而帶有餘式：

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 3 & -2x + 1 \\ 3x^2 - \frac{3}{2}x & -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \\ \hline \frac{3}{2}x + 3 & \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} & \\ \hline 3\frac{3}{4} & \end{array}$$

餘式是 $3\frac{3}{4}$ ，因此 $f_4 = -3\frac{3}{4}$ 。顯然，下一个多項式已經是零了。這樣一來，施篤姆列就由多項式 $x^3 + 3x - 1$ ， $3x^2 + 3$ ， $-2x + 1$ 和 $-3\frac{3}{4}$ 組成。

如果我們現在取數 N (有限的正數) 像我們已經指出過的那樣，那末這些多項式在 $x = -N$ 和 $x = N$ 時的值的符號將跟它們的首項的符號相同。這些符號我們列表如下：

	$x = -N$	$x = N$
f_1	-	+
f_2	+	+
f_3	+	-
f_4	-	-

在第一直行中有二個變號，在第二直行中有一個變號。這樣一來，多項式 $x^3 + 3x + 1$ 有 $2 - 1 = 1$ 個根。

現在我們可以轉到關於計算多項式的根的問題上來了。

我們所確定的目標是要計算多項式的根到任意的精確度。嚴格說來，雖然在二次方程的情形，根的公式給出根的精確值而並不是近似值，但是却不能令人滿意。事實上，如果我們說多項式 $x^2 - a$ 的根等於 \sqrt{a} ，這樣我們也只是指出，如果應用平方根的近似計算法則，那末得到多項式的根的近似值而具有任意的精確度。

為了多項式的根的近似計算，首先我們必須（和確定根的個數時的情況不同）着實地按照第一節的法則來計算這樣的數 N ，使得我們的多項式的所有的根都位於 $-N$ 和 N 之間。此後，我們把 $-N$ 和 N 間的區間分為幾部分，比如說分為二等分，而按照施篤姆定理我們便得到在它們每一半中，即在 $-N$ 和 0 之間以及 0 和 N 之間所含有的根的個數。如果在這些區間的每一部分都含有根，那末我們可依同法處理。我們這樣做下去，直到把從 $-N$ 到 N 的區間分成適當小的部分，使得我們能夠知道，在這些小部分中的哪一些中含有根，而在另一些中不含有根。這時候，就不再繼續分下去。但是這就是說，我們可以計算根到任何精確度，因為如果我們知道了根位於數 α 和 β 之間，比方說， α 和 β 間的差小於 0.001 ，那末 α 就是根的精確到 0.001 的弱近似值，而 β 就是強近似值。為了計算方便起見，我們常常不把區間分成兩等分而分成十等分。當我們得到這樣的一些小區間，使得在它們的每一個中或者有多項式的一個根或者一個根也沒有時，那末在隨後計算的時候我們就不需要利用施篤姆定理和計算施篤姆多項式列的值了。事實上，假設我們已知 α 和 β 之間恰好只有多項

式的一个根。設我們用數 γ 把 α, β 間的區間分成兩部分，並且要知道這兩部分中的哪一部分， α 和 γ 之間還是 γ 和 β 之間有根。這時候，只須計算多項式在 $x = \alpha$ 和在 $x = \beta$ 時的值。如果它們異號，那末就像在圖 9 中所看到的那樣，在 $x = \alpha$ 和 $x = \gamma$ 時多項式的圖形位於 X 軸的兩側，因此，就應該在 α 和 γ 之間的某處與 X 軸相交。這也就是表示，根位於 α 和 γ 之間。反之，若多項式在 $x = \alpha$ 和在 $x = \gamma$ 時的值同號，那末根就不可能位於 α 和 γ 之間。事實上，這時如果多項式的圖形在 α 和 γ 之間的某處通過 X 軸從一側到另一側，那末它一定要在 α 和 γ 之間的另一處回轉過來，因為在 $x = \alpha$ 和 $x = \gamma$ 時它是位於 X 軸的同側的（圖 10）。但是這就是說，多項式在 α

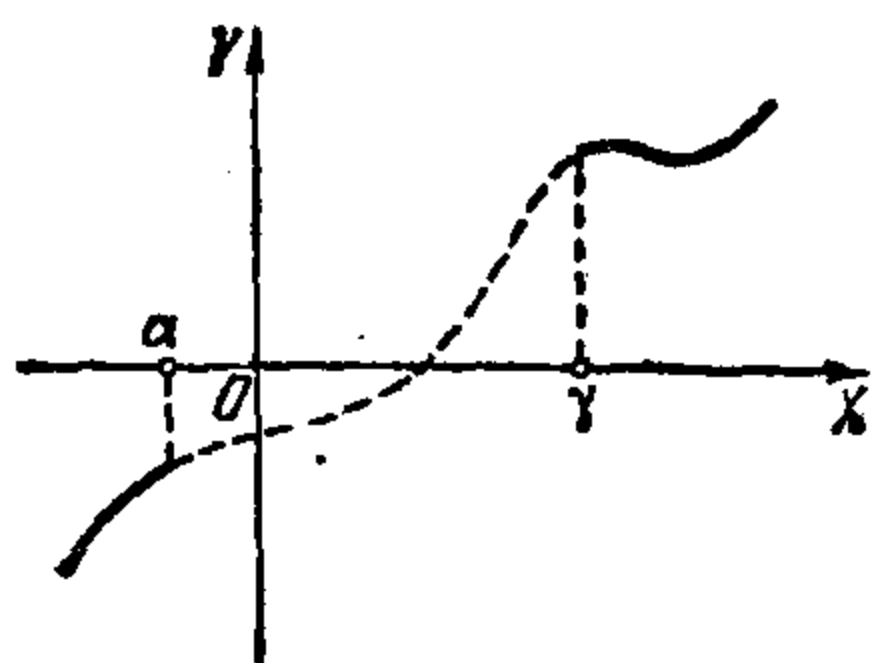


圖 9.

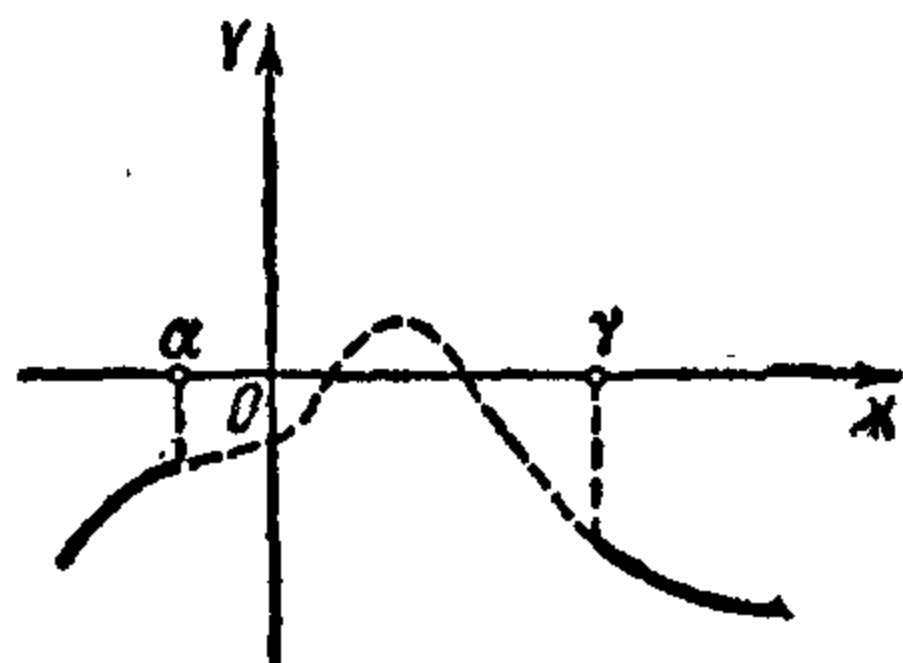


圖 10.

和 γ 之間至少應該有兩個根，而這却是不可能的，因為我們原來假設 α 和 β 之間只有一個根。這便表示，根不可能在 α 和 γ 之間，而應該在 γ 和 β 之間。

例：計算多項式 $x^3 + 3x - 1$ 的根，精確到 0.1。在前面的例題中我們已經看到，這個多項式只有唯一的一個根，就是說，我們可以應用剛才講到的那種一般方法。首先我們來計算 N 。按照第一節裏提到的法則，我們必須把三個數

$$0, \sqrt{3 \cdot 3} \text{ 和 } \sqrt[3]{3}$$

中的最大的一個取作 N 。這個最大數顯然是 $\sqrt{3 \cdot 3} = 3$ ，即 $N = 3$ 。這樣看來，所求的根是位於 -3 和 3 之間。

現在我們來考察根的符號。為了這個目的，我們來求出多項式在 $x = 0$ 和 $x = 3$ 時的值。算得結果是 -1 和 35 。因為這兩個數異號，所以根就位於 0 和 3 之間，因此根是正的。

現在我們來求出多項式在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 時的值，得到的是 3 和 13 。這樣看來，在 $x = 1, 2$ 和 3 的時候多項式的值都同號，而在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 時的值是異號的。這就是說，根位於 0 和 1 之間，即 $x = 0 \dots$ 。為了求出第一位小數，需要知道在十個小區間（在 0 和 $\frac{1}{10}$ 之間， $\frac{1}{10}$ 和 $\frac{2}{10}$ ，……， $\frac{9}{10}$ 和 1 之間）中哪一部分有根。為此，我們首先令 $x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 。我們便得到多項式的值是 $\frac{5}{8}$ 。因為 -1 和 $\frac{5}{8}$ 異號，所以根便在 0 和 $\frac{1}{2}$ 之間。現在令 $x = \frac{3}{10}$ 。得到的值等於 $\frac{27}{1000} + \frac{9}{10} - 1 = \frac{27}{1000} - \frac{1}{10}$ 。這是一個負數，因此表明根在 $\frac{3}{10}$ 和 $\frac{5}{10}$ 之間，因為多項式在 $x = \frac{3}{10}$ 和 $x = \frac{5}{10}$ 時異號。剩下來我們令 $x = \frac{4}{10}$ 。得到的值是 $\frac{64}{1000} + \frac{12}{10} - 1 = \frac{64}{1000} + \frac{2}{10}$ 。因為這是一個正數，所以根便位於 $\frac{3}{10}$ 和 $\frac{4}{10}$ 之間。我們的問題得到解決了。我們已經求得了多項式 $x^3 + 3x - 1$ 精確到 0.1 的根是 0.3 。